Квантование термодинамики

В. П. Маслов

1. Два разных языка

Эту лекцию я хотел бы сделать понятной как математикам, так и физикам. Это очень трудная задача. Один раз я пытался ее решить, когда писал свою первую книгу «Теория возмущений и асимптотические методы», но получилось так, что ни те, ни другие не поняли.

Почему это трудно? Потому что язык у физиков и у математиков совершенно разный и логика разная. Когда люди говорят пусть даже на одном и том же русском языке, но используют разные его стили, разные жаргоны, то может получиться полная ерунда.

Об этом хорошо написано в рассказе Чехова «Новая дача». Когда инженер, приехавший строить мост, говорит крестьянам: «Мы же к вам хорошо относимся, платите и вы нам той же монетой», то крестьянин реагирует так: «Монетой не монетой, а по гривенничку со двора надо будет собрать.»

Так что разница в языке играет существенную роль. В качестве примера я постараюсь рассказать несколько эпизодов из моей жизни, которые эту роль прояснят.

Первый эпизод такой. Я обнаружил в книге Б. Б. Кадомцева «Коллективные явления в плазме» на странице 76-й утверждение об асимптотике одного интеграла «при больших T». Далее уже на 77-й странице автор пишет: «А при очень больших T этот самый интеграл будет выглядеть по-другому». Эта книга замечательная, более того, является моей настольной книгой, и Б. Б. Кадомцев замечательный физик, но такие пассажи математику понимать трудно. И мне пришлось очень долго разбираться, что это на самом деле означает. Оказалось, что просто есть еще один большой параметр, о котором как бы умалчивается. По отношению к этому параметру первоначальные T будут того же самого порядка, а «очень большие T» гораздо большего порядка, чем этот большой параметр.

Вообще с малыми и большими параметрами, которые используют физики, довольно трудно разобраться. Тот же Кадомцев на странице 150-й и 151-й постоянно пишет: «малой, но конечной амплитуды». Четко сформулировать, что это означает и как используются эти малые параметры – это уже задача математиков.

Однако чаще всего навести математический порядок в физическом тексте чрезвычайно трудно. Физик может отбрасывать какие-то члены, зная из эксперимента, что они малы, а иногда и просто подгоняет под эксперимент. Эти манипуляции напоминают мне известную притчу об отце Онуфрии: «Отец Онуфрий оторвал огурец, оторвав откусил, откусив отплюнул, отплюнув отбросил». Математику же иногда трудно догадаться, почему физик отбросил те или иные слагаемые. Боголюбов говорил, что он всю жизнь занимался тем, что искал малые параметры.

Даже если физики и математики что-то доказывают примерно одинаково, то располагают это в разном порядке. Так, математик сначала формулирует результат в виде теоремы, а потом ее доказывает. Физик же делает вывод, а результат этого вывода (или теорему) формулирует потом.

В каком-то смысле математический подход лучше, потому что сначала формулируется результат. Но при этом математический текст труднее понимать, чем физический, потому что последний не содержит разных дополнительных условий, которые обычно содержит теорема. Например, условие принадлежности функции к такому-то классу. Это все, так сказать, пропускается мимо, поэтому текст читается гораздо проще. Я бы сказал так, что если физический и математический тексты посвящены одному и тому же, то иногда по физическому тексту можно четко восстановить математическое доказательство. Для понимания лучше, чтобы сначала следовал физический текст, как бы предварительный, эвристический, а затем уже – математическое и подробное доказательство.

Или еще пример. У математиков Фурье-образ функции от x уже является функцией от сопряженной переменной, скажем, функцией от k, а от x уже не зависит. Но у Кадомцева в книге, о которой шла речь, на 200-й странице определен Фурье-образ функции E, как E от k, а дальше это E_k все равно зависит от x. На странице 205-й это E_k дифференцируется по x.

Другое «недоразумение» встречается в «Термодинамике, статистической физике и кинетике» Ю. Б. Румера и М. Ш. Рывкина. Равновесное состояние Ферми и Бозе-газа в этой книге ищется с помощью дифференцирования энтропии по переменному числу частиц N_i, обладающих энергией ε_i при постоянном фиксированном числе g_i (g_i – число «ячеек»). Далее на странице 142 авторы пишут, что g_i пропорционально числу частиц N_i.

С другой стороны, физики не могут понять, что же математики хотят доказать, и не принимают косвенных доказательств. Я приведу пример моей беседы с теперь уже знаменитым физиком Анатолием Александровичем Власовым.

Я тогда был студентом на кафедре, которой он заведовал. У меня на втором или третьем курсе появились математические интересы. Я захотел переходить на мехмат и обратился к заведующему кафедрой Власову, с которым у меня были очень хорошие отношения:

– Анатолий Александрович, я решил переходить на мехмат, подпишите, пожалуйста, мне заявление.

– Нет,– говорит он, – я просто так вас не отпущу. Я сначала проверю ваши математические способности. Решите мне математическую задачу, и только после этого я вашу бумагу подпишу. Я говорю:

– Хорошо, дайте, пожалуйста, задачу. И Власов дает мне задачу:

– Решение волнового уравнения можно представить в виде формулы для запаздывающего потенциала, а можно – для опережающего. Докажите, что эти две формулы совпадают. Я отвечаю:

– Хорошо, я это могу сделать. Потом доказываю ему: решение волнового уравнения единственно при одних и тех же начальных данных. Проверяем начальные данные, проверяем то, что эти выражения удовлетворяют волновому уравнению, те и другие начальные данные совпадают, следовательно, эти решения совпадают. Власов говорит:

– Нет, я этого не понимаю. Вы докажите, что они равны, а не философствуйте.

– Анатолий Александрович, позвольте, – отвечаю я, – давайте я прямо по пунктам буду доказывать. А в каждом пункте, с которым вы не согласны, вы так мне и скажете: я не согласен. Давайте так рассуждать. Дальше я начинаю доказывать по пунктам: сначала докажем, что это единственно, затем, что удовлетворяет тому-то и тому-то, а раз так, то пишем разность и т. д. Иначе говоря, стал объяснять более подробно, как студенту. Он соглашается со мной:

– Да, с этим пунктом я согласен и с этим пунктом согласен и т. д. Я говорю:

– Анатолий Александрович, вот вы со всеми пунктами согласны, так что получается, что они равны. Он:

– Нет, я не понимаю. И тем самым он отказывается подписать мне бумагу. И уходит. Я за ним вприпрыжку:

– Анатолий Александрович, вот вы же сказали, что и с этим согласны и с этим. Он опять:

– Но я не понимаю. И так, быстро спускаясь по лестнице, он начал бить себя по лбу и говорить:

– Я не понимаю. Я – дурак. Да, я – дурак и не понимаю.

Так что А. А. Власов не мог воспринять косвенное доказательство. Он хотел только, чтобы я непосредственно вывел из одной формулы другую.

Еще был такой эпизод. Мой ученик В. Дубнов защищал свою дипломную работу и должен был получить отметку. Тогда я уже работал на кафедре математической физики, а от кафедры теоретической физики присутствовал Анатолий Александрович Власов. И вот он задал моему ученику вопрос: «Можно ли через две точки провести прямую»? Дубнов посмотрел в пол, подумал минуту и сказал: «М-м-м, можно». Тогда Власов вскочил и закричал: «Два! Вот она, ваша топология! Никогда, сколько бы вы ни целились, из одной точки в другую вы не попадете!» И, между прочим, как раз эта идеология и послужила основой для того, чтобы он написал свои знаменитые уравнения Власова.

Физики не очень хорошо понимают параметры и асимптотики. Я, по крайней мере, могу назвать одного замечательного физика Якова Борисовича Зельдовича, испытывавшего большие трудности при выступлении на математическом семинаре. Он, кстати, очень стесняясь, хотя был совсем не робким человеком, рассказывал на семинаре Гельфанда свою работу. При этом никак не мог объяснить то, что у него приведены асимптотические формулы. Я был тогда студентом и с места пытался крикнуть: «Это асимптотика по высокому барьеру». Но Гельфанд замахал на меня рукой, чтобы я не вмешивался.

Позднее, когда Зельдович уже занимался космологией, я иногда звонил ему и спрашивал, например, о какой-нибудь моей формуле, годится она или нет. Тогда он в уме начинал очень быстро считать: «Так-так, десять в минус десятой, то-то и то-то в минус пятнадцатой...» и отвечал: «Нет, эта формула не подходит». Я-то только мог сказать, что имеются такие-то асимптотики по таким-то параметрам, а он умел сразу усмотреть в них числа. Вместе с тем на докладе у Гельфанда, как я говорил, он побаивался и не мог исчерпывающе объяснить свою работу.

Я также помню доклад Фрадкина на семинаре Гельфанда. Ему тоже приходилось трудновато. Так что у физиков и математиков есть момент взаимного непонимания и даже некоторого презрения.

С другой стороны, как-то один из крупнейших математиков делал доклад на семинаре Ландау. Кажется, доклад был о методе наименьших квадратов. Мне об этом рассказывал один человек, возможно, он преувеличивал. Ландау спросил у этого человека о докладчике:

– Что, Л. – совсем дурак?

– Ну что вы.

– Ну а что у него есть?

– У него есть оценки в теории вероятности.

– Оценки, – сказал Ландау, – я не считаю результатом.

– У него есть серьезные работы по теории чисел.

– Теорию чисел я не считаю наукой.

При этом физики часто хотят, чтобы им были предъявлены на их языке некоторые мнемонические правила (типа правила «буравчика»), и между физиком и математиком происходит разговор, похожий на описанный в «Свадьбе» Чехова: Ять: «Не хватает электрического освещения». Жигалов: «Нет, брат, ты давай огня, который натуральный, а не умственный».

Когда на докладе я предъявляю новую формулу, математики просят: «наметьте доказательство», а физики спрашивают: «Как вы до этого додумались?»

У физиков в их мышлении всегда очень большую роль играет эксперимент. Например, знаменитая формула Планка, полученная в начале века и давшая константу Планка (только позже, в 1915 г., Бозе усмотрел в ней статистику Бозе–Эйнштейна), сразу совпала с экспериментом. Именно этого и добивался Планк, когда угадывал эту формулу.

Так же и другие физики учитывают и держат в голове одновременно большое количество экспериментов и объясняют, почему откинули тот или иной член в каких-то соотношениях. Можно из логических соображений привести этому контрпример из другой области. Но в конечном счете оказывается, что формула правильная.

Расскажу еще следующий эпизод. Я когда-то еще в шестьдесят четвертом году написал асимптотику для фейнмановского континуального интеграла и метод стационарной фазы, куда вошел индекс Морса. Я написал формулу и доказал ее косвенным образом, потому что континуальный интеграл еще не был математически строго введен. Потом выясняется, что физики стали сами эту формулу выводить, и я тут оказывался как бы ни при чем. Тогда Л. Д. Фаддеев одному из физиков сказал:

– Что же вы делаете? Это же Маслов доказал.

– Нет, – отвечает физик, – Маслов не доказал, он просто догадался, но он же не показал, что так получается, он не вывел эту формулу. А вот мы ее сейчас выведем.

Этим они как бы вывели меня из терпения, и я решил написать доказательство на «физическом» языке. Я написал как бы пародию на доказательство: «Вот здесь фейнмановский интеграл, вот там вставим фейнмановскую диафрагму, вот тут проходят такие-то траектории, а вот – трубка» и т. п. Одним словом, я бы это назвал пародией на доказательство и опубликовал все это в журнале «Теоретическая и математическая физика». Эту статью физики поняли, стали на нее ссылаться, и эта формула осталась за мной. Но когда Гюллимен и Стенберг выпустили книгу «Геометрические асимптотики», посвященную, в частности, моим работам, то они написали там так: «Вот это – формула Маслова, а вот – “доказательство” Маслова». Привели это «доказательство» и поставили кавычки. Эта книга и еще одна физическая статья повредили мне тем, что математики стали говорить: «А он не настоящий математик, его работы надо еще строго доказывать». Вот так я метался между этими двумя языками.

Есть еще такой момент. У Фока была приведена формула, которая легко доказывалась методом стационарной фазы. Потом эту формулу привел Ю. Егоров. В. И. Арнольд, которому Ю. Егоров дал эту формулу в качестве заметки в «Успехи математических наук», спросил меня, стоит ли, по моему мнению, публиковать эту работу. Я сказал, что, по-моему, стоит, так как они разговаривают на разных языках. Хотя, с одной стороны, это, конечно, то же самое, но, с другой стороны, это разные языки. Арнольд опубликовал эту работу. В результате эта теорема стала знаменитой теоремой Егорова, которая вошла во все учебники.

Вместе с тем, если посмотреть на послесловие Фока к книге Дирака, можно заметить, что если брать асимптотику по большим частотам, то формула при этом получается такая же, как если бы мы брали асимптотику по гладкости. Что касается доказательства, то в моей книжке «Теория возмущений» я на эту формулу ссылался и писал, что из метода стационарной фазы доказательство очевидно. Тем не менее это разные подходы, разные языки и разные понимания.

Хочу привести еще такой эпизод, хотя он больше похож на анекдот. Это произошло с человеком, которого я хорошо знал – он учился на курс старше меня. Про него рассказывали, что когда его хотели призвать в армию, он принес справку о том, что он сумасшедший, но теоретической физикой заниматься может. Один преподаватель рассказывал про этого студента следующее. Во время ответа на экзамене он сказал, что такой-то факт основывается на лемме о том, что сумма модулей равна модулю суммы. Преподаватель – это был Борис Михайлович Будак (он мне и рассказал этот эпизод) – очень остроумный человек, говорит: «Хорошо, лемма очень интересная, пожалуйста, докажите ее». Через какое-то время он, походив между рядами, снова подошел к этому студенту и спросил: «Ну как, доказали?» «Да, конечно, я доказал», – отвечает тот. «И как же?», – допытывается преподаватель. «А я рассмотрел огромное число примеров, и в подавляющем большинстве случаев это так». Этот «анекдот» про моего знакомого, кстати, очень милого человека, который впоследствии действительно успешно занимался теоретической физикой, на самом деле имел место.

Всем известно доказательство физиков того, что все нечетные числа простые: один – простое число, три – простое число, пять – тоже простое число, семь – тоже, девять – это редкое исключение, одиннадцать – простое, тринадцать – простое, достаточно, доказательство закончено. В этой шутке есть доля истины.

Известно, какому разгрому подвергли на семинаре Ландау доклад Боголюбова, когда он рассказывал свою знаменитую работу 1947 г. о сверхтекучести. Я знаю, хотя не был тогда с ним знаком, насколько он переживал этот «разгром». Ему в тот же день позвонил академик И. М. Виноградов, поставивший его доклад на отделении математики и физики. Он ему сказал: «Николай Николаевич! Что же вы так меня подвели». Николай Николаевич всю ночь пересчитывал, а утром позвонил И. М. Виноградову и сказал: «Иван Матвеевич, я пересчитал, все правильно». Потом, как говорят, Мигдал две недели проверял работу Боголюбова, и, наконец, ее как-то признали. Так что вторгаться в область других наук очень не просто. Тем не менее, хотелось бы, чтобы физики эту мою работу восприняли и поняли. Непонимание в языке, или вернее в жаргоне, между физиками и математиками столь велико, что напоминает известный анекдот: Учитель говорит ученику, написав на доске уравнение: «Найдите x», а тот отвечает, указав на доску: «Да вот же он».

В. И. Арнольд рассказывал мне недавно, что когда-то он решил одну задачу, поставленную физиками. Его научный руководитель А. Н. Колмогоров рекомендовал ему послать эту работу в физический журнал, поскольку она представляет интерес для физиков и задача-то была поставлена физиками. Арнольд послал ее в ЖЭТФ. Через некоторое время ему позвонил академик Леонтович, с семьей которого семья Арнольда была дружна, и сказал: «Дима, приходите ко мне, я сварю гречневую кашу и мы поговорим о вашей статье». Арнольд пришел, и Леонтович ему сказал: «Вы употребляете там слова “поверхность тора” и “мера”, а физики не знают, что это такое; слово “доказательство” физики тоже не признают. Поэтому ешьте кашу, а статью вашу мы отклоняем». Позже Арнольд узнал, что отзыв давал сам Ландау, а Леонтович только передавал его слова. Арнольд напечатал статью в ДАН, и в дальнейшем на нее было огромное количество ссылок в физической литературе и только в физической, а те слова, которые вызвали протест, давно утвердились и в физических учебниках.

Этот рассказ напомнил мне слова известного композитора Николая Метнера, когда он прослушал «Стальной скок» Сергея Прокофьева: «Если это – музыка, то я – не музыкант». Когда я делал доклад у физиков на самом престижном семинаре по данному вопросу, на котором присутствовали не только теоретики из Института физических проблем, но и физики из Института Ландау, то, объясняя переходы с одного уровня энергии на другой, я изобразил уровни параллельными отрезками. Уровни энергии – это фактически точки, а я просто для наглядности нарисовал их черточками. Мне задали вопрос: «Почему они у вас эквидистантны»? Я ответить не успел, так как за меня ответил кто-то из членов семинара. После чего началось довольно бурное обсуждение вопроса, почему они эквидистантны. После некоторых прений и переговоров обсуждение закончилось тем, что встал руководитель семинара и громким голосом объяснил, что на самом деле я имел в виду. Я совершенно ничего не понял, но промолчал, чтобы не затягивать до бесконечности.

История с этими черточками напомнила мне историю со стихотворением Валерия Брюсова. Он декламировал его в компании поэтов и, возможно, своих поклонников. В стихотворении была фраза: «Упаду на седой подоконник». Тут же все стали обсуждать, что Брюсов имел в виду и почему он так написал. И так эту фразу интерпретировали, и этак, а потом спросили: «Что же вы имели в виду в таком определении подоконника?» Брюсов ответил: «Просто он у меня такого цвета».

2. Старые проблемы

Я сам кончал физический факультет, но потом мне пришлось заниматься задачами, которые были связаны с закрытой тематикой. Я работал совместно с инженерами и от теоретической физики несколько отвлекся. Затем, когда я был назначен заведующим кафедрой квантовой статистики и теории поля, где преподается термодинамика, то мне волей-неволей пришлось заново изучать эти науки. Но это на самом деле не всегда плохо. Эйнштейн как раз шутил на тему, как удалось ему открыть свои законы. Он говорил, что был несколько туповат, и поэтому, когда все всё уже поняли, он еще не понял, и ему пришлось в этом разбираться более основательно.

Когда я снова стал знакомиться со многими вопросами теоретической физики, то обнаружил очень серьезную дыру. В математике такие факты обычно формулируются как проблемы. А дыра заключалась вот в чем. Все функции распределения, которые были описаны когда-либо физиками и основывались в основном на распределении Гиббса, при температуре, равной нулю, давали энергию, равную нулю. (Энергия системы при температуре, стремящейся к нулю, стремится к нулю.) Вместе с тем где-то в конце тридцатых годов было показано экспериментально, что при температуре, равной нулю, есть сверхтекучесть, т. е. есть энергия, отличная от нуля. Причем сверхтекучесть проявляется как при движении жидкости вдоль тора, так и по изогнутому капилляру. Этот момент заставил меня просматривать все работы по квантовой статистике под этим углом.

Саму сверхтекучесть Ландау объяснил, с моей точки зрения, совершенно неожиданным образом. Без привлечения обычной термодинамики, а через спектр уравнения Шреденгера. Он показал, что если система находится не на нижнем уровне энергии уравнения Шредингера, не в основном состоянии, то, несмотря на это, она устроена так, что на нижний уровень переход почти запрещен при большом числе частиц. Поэтому эта система, при некотором возмущении, о котором Ландау говорил как о трении, не может скатиться на более низкий уровень, находясь в таком метастабильном состоянии, и поэтому продолжает течь. Иначе говоря, как бы есть еще такая специальная метастабильная серия, на нижнем уровне которой мы находимся, а на самую основную серию переход затруднителен.

Есть еще критическая скорость Ландау. Это означает, что имеется критический уровень энергии, такой, что если энергия жидкости больше него, то жидкость перестанет быть сверхтекучей. Иначе говоря, спектром определяются и фазовый переход из сверхтекучей фазы в нормальную.

Боголюбов в своей знаменитой работе блестяще подтвердил это объяснение сверхтекучести Ландау и дал математическую теорию, описывающую эту точку зрения. Он рассмотрел систему не в капилляре, а на торе. Иначе говоря, рассмотрел задачу с периодическими условиями. Как бы вся эта система находится на некотором торе. Далее был предельный переход от тора ко всему пространству (радиус тора увеличивался до бесконечности). Фазовый переход через критическую скорость Ландау у Боголюбова, если перевести его на строгий математический язык, доказан для скорости угловой, т. е. скорости на торе (дискретной!). У Ландау и Лифшица в «Статистической физике» (стр. 94) как раз и говорится о том, что угловая скорость есть термодинамическая величина и, следовательно, по ней может совершаться фазовый переход. А по скорости, уточняет Ландау, которая прямолинейная, у нас получается просто сдвиг Галилея, и ничего не должно от этого меняться.

Отсюда я сделал заключение о том, что, если вводится температура, то тоже должен быть спектр, т. е., например, очень маленькая температура должна не сильно изменить приведенную концепцию.

Температура же добавляется таким образом, что она умножается на энтропию. Значит, энтропия тоже должна быть оператором и свободная энергия тоже должна иметь спектр. Это, конечно, доказательство в стиле Паниковского, который доказывал, что гири золотые, таким образом: «А из чего же они по-вашему?» Соображение: «А что же еще тут может быть?» приводило меня к мысли о том, что свободная энергия тоже должна быть оператором.

В физике не ставятся проблемы так, как в математике. Например, проблемы Гильберта и другие подобные. Тем не менее, можно сказать, что открытие сверхтекучести и работа Боголюбова поставили следующие проблемы: найти и предъявить такие температурные распределения, чтобы при температуре, равной нулю, энергия была бы отлична от нуля. Боголюбов в 1947 г., в результате наводящих соображений Ландау, посчитал для слабо неидеального Бозе-газа при температуре, равной нулю, критическую скорость Ландау. Тогда естественно было бы поставить вопрос: как же меняется эта критическая скорость, когда температура больше нуля? Какова зависимость критической скорости от температуры при пусть даже очень малой, но отличной от нуля температуре. Эта проблема должна была быть поставлена уже в 1947 г., после знаменитой работы Боголюбова. Поэтому ответ на эти вопросы является ответом на вопросы более чем полувековой давности.

3. Различные картины *N* тел и различные их представления

Мне удалось ответить на эти и другие вопросы с помощью установления некоторых новых представлений уравнения Шредингера, обобщающих метод вторичного квантования. Как известно, не сразу было установлено, что матричная механика Гайзенберга (Гайзенберговская картина) и уравнение Шредингера (Шредингеровская картина) эквивалентны, и матричная механика является некоторым «представлением» уравнения Шредингера. Иначе говоря, имеются тождества, которые переводят одну «картину» в другую. Точно так же запись уравнения Шредингера (для симметрических решений – бозонов) во вторично квантованном виде эквивалентна исходному уравнению.

Здесь тоже есть тождества, переводящие одну «картину» в другую. Я нашел существенно более общее, чем обычное вторичное квантование, представление уравнения Шредингера и назвал его ультравторичным. Эта новая «картина» позволила проквантовать термодинамику, энтропию, а с ней и свободную энергию. Попытаюсь здесь наглядно объяснить эту «картину» и эквивалентность различных «картин».

При рассмотрении задачи многих тел имеют место два аспекта. Эти многие тела могут находиться в нашем трехмерном пространстве и как-то двигаться, может быть, сталкиваться, воздействовать друг на друга. Все это в нашем трехмерном пространстве. Но мы можем рассматривать их и по-другому. А именно: можем рассматривать эти N тел как одну точку (под N телами я понимаю N материальных точек) в $3N$-мерном пространстве. И в этом $3N$-мерном пространстве эта одна точка совершает некоторое движение, перемещается, а мы можем следить за этим перемещением. В некоторых случаях оказывается полезен один из этих двух подходов, двух аспектов, а в других случаях – другой. Так, с точки зрения математики проще рассматривать одну точку. А с точки зрения физики, так как мы живем все-таки в трехмерном пространстве, хотелось бы понимать, как материальные точки ведут себя в нашем трехмерном пространстве. Это более естественная «картина». Можно, например, следить в трехмерном пространстве за одной частицей, которая находится в поле всех других частиц. В частности, теория самосогласованного поля Власова на этом основана. Там мы считаем, что все частицы примерно одинаковы и имеют одинаковое распределение. Мы можем считать, что одна частица как бы взаимодействует с другой. А та другая – это та же самая частица, т. е. распределена она точно так же, как и первая.

Недаром Власов, как я говорил ранее, утверждал, что из одной точки в другую никак попасть нельзя. Нужно эту точку как-то «размазать» в пространстве, т. е. рассматривать плотность вероятности ее пребывания в данном месте пространства.

С математической точки зрения важно было бы не приближенное, а точное уравнение в трехмерном пространстве, которое бы соответствовало уравнению движения частицы в $3N$-мерном пространстве.

Оказывается, это можно сделать не приближенно, как Власов, а точно с помощью вторичного квантования, т. е., иначе говоря, рассматривать поведение в трехмерном пространстве не функций, а операторов – операторов рождения и уничтожения. Впервые это было сделано Дираком для квантовой механики. Однако рассматривать именно квантовую механику совершенно не обязательно. Так, Шенберг рассматривал классическую механику (это был и приблизительно 1953–1956 гг.) и применил этот метод вторичного квантования к классическим объектам и к классической статистической физике.

На самом деле это совершенно общая вещь. Мы, например, с моим учеником применили этот метод к случаю N полей и провели как бы третичное квантование, которое на самом деле являлось вариантом вторичного.

Здесь возникает естественное обобщение. Если мы рассматриваем N частиц как одну частицу в $3N$-мерном пространстве, то почему бы нам не рассматривать среди этих N частиц, например, две частицы. Их я могу считать одной частицей в шестимерном пространстве и рассматривать дальше эти пары шестимерных частиц. Каждая из них аналогична одной частице в $3N/2$-мерном пространстве. Так что я могу одновременно следить за парой частиц и за одной частицей. Иначе говоря, имеются некоторые шестимерные частицы (пары) и некоторые трехмерные частицы, и все это вкладывается в соответствующее пространство. Если пар у меня k штук, а «одиночных» частиц – m, то $2k+m=N$, где N – общее число частиц.

Помимо координат точки (местоположения точки) могут быть еще другие степени свободы. Например, в классической механике это могут быть еще и импульсы, а в квантовой теории – еще и спины или еще какие-нибудь другие степени свободы.

4. Статистический спин

В той теории, которую я здесь буду излагать, я добавляю еще одну степень свободы – минимальную – просто номер. Кроме того, что частица находится в каком-то месте пространства, ей присваивается еще и номер. Мне не известно, чтобы эта точка зрения имела в квантовой механике хорошую интерпретацию. Хотя в теории Бора у нас есть электроны и мы можем их менять местами, при этом ничего не меняется. Это принцип тождественности. Но кроме этих электронов есть еще номера орбит, их тоже можно рассматривать как присвоенные электронам номера.

Переход из квантовой механики в классическую, как мы знаем, связан с представлениями уже о классических объектах. В моих работах последних лет приведен предельный переход в классику для статистики Ферми–Дирака[1]. Классическим объектом, отвечающим принципу запрета Паули, является очередь. Предположим, что нам надо купить большое количество сахара, а в одни руки дают лишь по полкило[2]. У стоящих в очереди представителей нашей компании могут быть номера, или, говоря более грубо, номерки, которые кем-то выдаются. При этом очередь может быть и очень длинной. Люди могут отмечаться ночью, могут меняться своими номерками, но при этом у каждого остается какой-то номерок. От перемены их мест конечный результат не меняется. Эта новая степень свободы – эти номера – будет присутствовать во всей теории.

Принцип тождественности частиц в квантовой и классической механике совершенно разный. В классической механике он заключается в том, что нам не надо различать эти предметы. Для некоторых задач это различие не играет роли. Например, в пачке денежных купюр одного достоинства нам не нужно их различать, и мы можем их менять местами (предел при $h>0$ статистики Бозе). Сами пачки одного достоинства мы можем разложить по пронумерованным полкам, т. е. присвоить им номера.

В квантовой же механике считается, что мы не можем их в принципе различить, так как они являются принципиально неразличимыми. Такая разница в подходах оказывается существенной.

Если придерживаться точки зрения неразличимости частиц, то оказывается, что из этого принципа непознаваемости может быть выведено уравнение Шредингера. Я специально приведу в книге модель, которую я когда-то придумал для вывода уравнения Шредингера, чтобы объяснить роль нумерации. Вывод, который я предложил, основан на следующем. Во-первых, время считается дискретным. Иначе говоря, мы видим мир как в кино. Ведь в кино, на самом деле, мы видим лишь отдельные сменяющие друг друга кадры. Но нам кажется, что это непрерывный процесс. Предположим, что и наша жизнь устроена так же. Она состоит из отдельных «кадров», но они так быстро мелькают, что создается впечатление, что мы живем в непрерывном времени.

Если принять такую точку зрения, то мы будем рассматривать отдельно каждый «кадр» и на каждом из них видеть, допустим, N частиц. И вот эти N частиц, которые мы видим на каждом «кадре», движутся в трехмерном пространстве или, может быть, одна частица как-то движется в $3N$-мерном пространстве. Эта частица от одного «кадра» к следующему продвинулась на очень маленькое расстояние и с точки зрения разума это та же самая частица.

Но если мы принимаем данную модель, то, прослеживая дискретную траекторию частицы, мы не можем знать, она ли появилась на следующем «кадре» или, быть может, эта частица уже другая. Такая концепция приводит к объяснению картины Шредингера для волновой функции.

Таким образом, эти скачки от одного к другому моменту времени в пределе могут дать, как я выяснил, само уравнение Шредингера. Возможно, таким образом можно описать наш квантовый мир.

Этот подход также может развить интуицию, с помощью которой человек сможет объяснить какие-то эффекты с позиции модели кино. Он также может дать дополнительный импульс к новым конструкциям и новым идеям. Ведь на самом деле принципы, которые физики извлекли у Маха, очень сильно расширили их кругозор. Они также расширили возможность фантазировать, творить, придумывать что-то такое, что объясняло бы всевозможные эффекты не с обычной, стандартной точки зрения, а с точки зрения совершенно новой концепции.

Действительно, модель, которую я придумал, очень помогла мне создать ультравторичное квантование. Поэтому мне кажется, что читателю полезно с этой моделью ознакомиться и, может быть, она расширит его возможности, его интуицию, приведет к объяснению каких-то эффектов.

Итак, в моей модели имеется дискретное время (как в кино). Расстояние между соседними моментами времени настолько мало, что мы видим все как непрерывный процесс. В результате получается уравнение Шредингера.

В данной модели в каждый следующий момент я могу перенумеровать частицы по-своему и все эти номера переставлять в силу тождественности частиц. При этом в приведенной выше модели мира, где через каждый момент времени, через каждое Δt, мы видим свой кадр, мы не знаем – это те же самые частицы или это другие частицы. Поэтому мы можем их нумеровать произвольным образом и в каждый момент времени нумерацию менять. Таким образом, номера у нас тоже совершенно свободны.

Например, у меня N частиц, и я рассматриваю какие-то пары частиц и одиночные частицы, которые я пронумеровал. Возможно, мне удобно пронумеровать и пары. Пронумеровал ли я их или нет, от этого ничего не меняется, поскольку эта нумерация не связана с тем, что я фиксирую частицы, с тем, что они не могут поменяться местами.

Таким образом, все это одно и то же. Это просто разные представления одного и того же. И я мысленно нумерую частицы или набор частиц. От этого ничего не меняется, но в мыслях у меня возникают различные картины того же явления. Вторичное квантование позволяет записать уравнения в трехмерном пространстве, но, правда, с операторами – операторное уравнение. Оно эквивалентно одному уравнению в $3N$-мерном пространстве – уже просто уравнению – не для операторов, а для функций. Та же самая задача получается в тех представлениях, которые я предлагаю и называю ультравторично квантованными.

Поскольку номера, которые присваиваются частицам, очень похожи на обычные спины, то я назвал их статистическим спином. В отличие от обычного спина, статистический спин принимает все целые значения $s = 1, 2, ...$

Операторы рождения и уничтожения определяются точно так же, как в случае с обычным спином, и точно так же, как и в последнем случае, зависят от статистического спина и обозначаются b^{+}_{s}, b^{-}_{s}, где s – статспин. Если они зависят и от обычного спина σ, то $b^{+}_{\sigma,s}$, $b^{-}_{\sigma,s}$ – операторы рождения и уничтожения пары – вводятся точно так же, как операторы рождения и уничтожения «шестимерной частицы» и обозначаются через B^{+}, B^{-}. Мы для простоты будем здесь рассматривать случаи, когда они не зависят от статспина.

5. Асимптотическое размывание картинки

В тот момент, когда мы следим за одной частицей, а все остальные как-то размываются (концепция, которая позволила Власову написать его уравнения), мы уже используем на самом деле некоторую асимптотику, некоторый малый параметр. Как раз такой параметр и вводил Боголюбов, чтобы получить строго уравнения Власова. В тот момент, когда мы начинаем эту картину размывать, в зависимости от того, за какими мы следим частицами – за одиночными или за парными, получаются разные асимптотики, разные «размывания». При этом оказывается справедливым такой замечательный факт: каждому такому «размыванию» отвечает асимптотически своя серия собственных значений спектра N-частичного оператора Шредингера. Когда или $N \to \infty$, или еще какой-нибудь параметр стремится соответственно к бесконечности или к нулю, то вероятность перехода из одной серии в другую чрезвычайно мала. Иначе говоря, каждой картине, уже размытой, отвечает своя серия.

Существуют такие картинки, что, глядя на них, сначала мы видим изображение одного предмета, а потом, посмотрев по-другому, – совершенно другого. Так же и на какой-нибудь абстрактной картине можно увидеть одно, а можно – совершенно иное. Но когда увидел определенное изображение, то переключиться на другое довольно-таки трудно.

Когда-то я пришел в частную коллекцию известного коллекционера Якова Евсеевича Рубинштейна и издалека увидел картину Павла

Кузнецова, вероятно, недавно им приобретенную. Я закричал: «Какой у вас замечательный новый Павел Кузнецов! Какие потрясающие деревья!» А он мне отвечает: «Да, это Павел Кузнецов, но это не деревья, это – слоны». И я помню, как мне пришлось напрячься, чтобы увидеть на картине слонов. Когда же я их увидел, то посмотреть на нее так, чтобы снова увидеть деревья, мне уже было почти невозможно.

Вот так же и здесь. Как только мы картину «размыли», как только применили метод, связанный с параметром, то переход из одной асимптотики к другой оказывается почти запрещенным. Иначе говоря, вероятности перехода с тех собственных значений, которые отвечают одной асимптотике, на собственные значения, отвечающие другой, очень малы. Когда параметр стремится к бесконечности, как правило, они экспоненциально малы по тем параметрам, которые размывают эту картину.

Примеры видения с одной и той же точки зрения разных картин, таким образом, в известной мере связаны с психологией одного человека, но когда уже имеется большой параметр, например, очень большое число людей одно и то же явление представляет себе как одну картину, а другие – как другую, то переход от одного видения к другому может быть почти запрещен.

Я уже приводил пример с очередью для объяснения значения номеров. Приведу еще один, экономический пример.

Цены одних и тех же предметов одни люди прикидывают на доллары, а другие на рубли. Это два разных, но эквивалентных взгляда, так как рубли можно поменять на доллары. Однако если ввести параметры – число людей, которые считают в долларах, и параметр времени, то когда эти параметры станут очень большими, обе картины не только не будут в асимптотике эквивалентны, а даже, так сказать, ортогональны, и переход от одной к другой будет почти невозможен. Как известно, экономика существенно регулируется процессом печатания денег. У нас этот процесс осуществляет Госбанк. Стоимость печати несоизмеримо ниже покупательной способности купюры.

Доллары же – вторую валюту – печатают в США. А так как в большинстве фирм, как известно, ведется двойная бухгалтерия: одна официальная – в рублях, другая – неофициальная – в долларах, а печатаются доллары в другом государстве, то эффект больших чисел (больших указанных параметров) даст в асимптотике существенное различие двух указанных эквивалентных картин.

6. Серии и сериалы

Вероятности перехода с одного уровня на другой играют существенную роль. В частности, как известно, испускаемые атомом кванты энергии связаны с переходом электронов с одного уровня на другой. Если вероятность перехода равна нулю или очень мала, т. е. переход практически запрещен, то соответствующие уровни как бы принадлежат разным сериям. По существу, разбиение на серии означает разбиение на изолированные друг от друга системы. Если данная серия уровней энергии имеет минимальный уровень, который является как бы основным состоянием серии, то это метастабильное сос-тояние. Если система находится в этом состоянии, а переходы на нижние уровни других серий почти запрещены, то система будет находиться в нем достаточно долго.

Наличие сверхтекучей жидкости или сверхпроводящего тока отвечает таким метастабильным сериям. Ток может течь без торможения в течение 100 000 лет, что означает, что серия почти стабильна.

В конечном большом объеме, в котором рассматривается система с большим числом частиц, значение скоростей и токов дискретно, и каждое значение определяет свою метастабильную серию. Набор серий, отличающихся скоростями, мы будем называть сериалом.

Каждой картине, о которой шла речь выше, в асимптотическом приближении отвечает свой сериал. Хотя физики прямо этого не говорят, но реально они стремятся найти такой сериал, нижний уровень нижней серии которого (т. е. при скорости, равной нулю) совпадал бы с основным состоянием всей исходной системы.

В упомянутой выше работе Н. Н. Боголюбова 1947 г. найден сериал, отвечающей такой картине: N частиц находятся в трехмерном пространстве, и все номера у них одинаковые.

Оказывается, однако, и это будет доказано в настоящей работе, что сериал, отвечающий картине: пары частиц не пронумерованы, а отдельные частицы пронумерованы – имеет более низкий нижний уровень, чем боголюбовский сериал. В этом смысле он, по-видимому, более отвечает истинному явлению сверхтекучести и в большей степени соответствует эксперименту. Хотя, если природа посадила систему на другой сериал, то она в таком состоянии будет находиться долго. Однако между различными сериями возможны резонансы. В этом случае серия разрушается. Примером может служить одномерное уравнение Шредингера с потенциалом, имеющим два минимума. Если максимум между минимумами очень большой величины или если мы имеем квазиклассическое приближение, то каждой впадине соответствует своя серия, переходы из одной впадины в другую почти запрещены («туннельные» эффекты), если нет резонансов. Если какие-то собственные значения двух серий совпадают, то возможен резонанс, при котором нахождение частицы в одной впадине на этом собственном значении разрушается. Например, в симметричном относительно максимума потенциале все собственные значения «почти» совпадают, все резонируют и система не распадается на серии.

7. Квантование свободной энергии

Оставим собственные функции уравнения Шредингера (оператора Гамильтона) прежними, а из собственных значений вычтем температуру, умноженную на энтропию, отвечающую этому собственному значению. В простейшем случае дискретного спектра это, как известно, есть логарифм кратности собственного значения. Оператор Гамильтона, как известно, может быть представлен суммой его собственных значений, умноженных на проекторы на соответствующие подпространства собственных функций. Оператор свободной энергии, как сказано, является суммой этих же собственных значений, из которых вычтено произведение температуры на энтропию, умноженных на те же проекторы. Если рассматривать основное состояние этой квантовой свободной энергии, то получатся все результаты прежней термодинамики. Но можно рассматривать не только нижний уровень данного сериала, а также и серии, отвечающие скоростям (токам). Тогда мы получим ответы на вопросы о том, как будут меняться метастабильные состояния при изменении температуры. Мы покажем, что существуют сериалы, содержащие сверхтекучие и сверхпроводящие серии при любой температуре. Однако эти сериалы заведомо не содержат основного состояния, т. е. существуют сериалы, у которых нижний уровень ниже. Природа, по идее, должна выбрать эти последние. С другой стороны, по аргументации великого Дирака, «было бы удивительно, если бы природа не использовала эту возможность». Добавлю, «где-нибудь» – в ядрах, в звездах и т. д., одним словом, где-нибудь. Можно ли «руками» создать такие сериалы? Все-таки вручную мы можем создать метастабильные серии, более высокие, чем основное состояние, пустив ток, заставив течь. Нельзя ли, используя резонансы, «накачать» и высокотемпературные сериалы?

8. Сверхтекучесть и сверхпроводимость

Когда большой параметр задан как конкретное число, то не всегда понятно, «большой» это параметр или «не очень большой». Например, когда число частиц равно ста, то это вроде бы большой параметр, но логарифм этого большого параметра уже не большой. Возникает вопрос, как же быть, когда, скажем, число частиц не очень велико.

В этом случае, прежде всего, хотелось бы узнать, как определить метастабильное состояние. Я определю, по крайней мере, необходимые условия метастабильного состояния. Для этого вначале я рассмотрю совсем простой пример – одномерное стационарное уравнение Шредингера с потенциальной ямой, у которой две впадины: одна впадина ниже, а другая – выше. То есть у нее имеются два минимума: один из них минимум глобальный, он отвечает основному состоянию, а другой – локальный. В случае квазиклассической асимптотики он определяет метастабильное состояние. Что это значит? Если система находится на этом самом низком уровне, отвечающем локальному минимуму или более мелкой впадине, иначе говоря, собственная функция сосредоточена вблизи локального минимума, то возникает вопрос, что будет, если возмутить задачу. Или насколько вероятен переход с этого состояния в основное, т. е. в состояние, собственная функция которого сосредоточена вблизи глобальному минимума, а вне его окрестности достаточно быстро убывает.

Если у нас есть квазиклассическое приближение, то «хвосты» этих собственных функций очень быстро убывают. Поэтому матричный элемент, получающийся в результате возмущения каким-либо оператором умножения на внешний потенциал, будет очень мал, поскольку произведение функций очень мало. Иначе говоря, если взять матричный элемент равный $(\psi_0 V_1 \psi_1^*)$, где ψ_0 – собственная функция, отвечающая основному состоянию, ψ_1 – первая собственная функция, отвечающая другой впадине, а V_1 – потенциал, которым мы возмущаем систему, то он будет мал. Это значит, что вероятность перехода в основное состояние очень мала («свалиться» на нижний уровень очень трудно) и, следовательно, это состояние будет метастабильным.

В то же время переходы на более высокие уровни, носитель которых тоже находится вблизи минимума этой мелкой впадины, вполне возможны.

Поскольку мы говорим о том, что метастабильное состояние в какой-то степени является моделью сверхтекучести и сверхпроводимости, важно, чтобы энергия не стала меньше. Если же она увеличилась (скорость стала больше от возмущения), то тем лучше. В результате возмущения задачи, как считал Ландау, как бы трением энергия, тем не менее, не уменьшилась, потому что переход на более низкие уровни для такой асимптотической задачи как бы запрещен.

Но если возмущать задачу с помощью оператора из более широкого класса, например, содержащего оператор сдвига, то матричный элемент вовсе не будет мал. Поэтому важно определять, какими именно операторами возмущается задача.

Операторы, которыми мы возмущаем задачу, сохраняют носитель функции. Иначе говоря, если на функцию $\varphi(x)$, достаточно гладкую и равную нулю, вне некоторого интервала (носителя) мы подействовали оператором умножения или оператором дифференцирования в любой степени, то эти операторы не выводят функцию за ее носитель. Такими операторами мы обычно и возмущаем задачу.

Так что, прежде чем говорить, что у нас есть метастабильное состояние, необходимо определить класс операторов, относительно которых оно метастабильно. Естественными операторами, обладающими этим свойством, как раз и являются потенциальные силы.

Возникает вопрос: если это не квазиклассическое приближение и параметр h не мал, и может быть, барьер не очень высокий, что тогда? Может ли тогда существовать метастабильное состояние и сколь долго? Эти вопросы мы попытаемся решить в данном параграфе. Первый вопрос: возможно или невозможно вообще такое состояние? Второй вопрос: насколько малы будут матричные элементы перехода? Первый вопрос сводится к существованию минимума, но минимума чего? Мы говорили о минимуме потенциальной ямы, но о каком минимуме идет речь в самой квантовой задаче, без малого параметра? В такой задаче в качестве возмущающих потенциалов возьмем операторы умножения на гладкие финитные функции с носителем на отрезке [a, b]. Подействовав ими на все пространство L^2, получим множество значений результата этого действия. Возьмем функции этого множества значений и посмотрим, достигается ли на них локальный минимум исходного гамильтониана? Здесь под минимумом понимается настоящий локальный минимум, когда вторые производные положительные и минимум достигается где-то в середине, а не на конце отрезка. Если отрезок [a,b] включает точку минимума нашего потенциала – более мелкую впадину, то тогда локальный минимум при достаточно малом h, конечно, есть. Он есть и при не очень малом h, но именно наличие такого минимума даст нам ответ, может или не может существовать метастабильное состояние. Если такого минимума нет, то и о метастабильном состоянии говорить нельзя. Но если второй впадины нет, то, по-видимому, минимума не будет и у гамильтониана, по крайней мере при достаточно малых h.

Во всяком случае, прежде всего встает вопрос: существует ли локальный минимум у квантовой задачи, не связанной с классикой, с классическим гамильтонианом. Если такой локальный минимум существует, то существует собственное значение, ближайшее к нему, и отвечающая ему собственная функция определяет некоторое метастабильное состояние исходного оператора. При этом малое шевеление длины отрезка не даст перескока на другое собственное значение.

Значение безразмерной величины $V_0 a^2 m / h^2$, при которой исчезает (не основной) локальный минимум, будем называть критическим (здесь m – масса, h – константа Планка, а потенциал имеет вид $V_0 V(x/a)$, где V_0 – константа, a – характерная длина, а $V(y)$ – указанная выше потенциальная яма с двумя впадинами).

Вопрос о том, насколько долго живет это метастабильное состояние, еще не решается, поэтому я говорю лишь о том, что это условие является необходимым условием существования метастабильного состояния.

Разумеется, метастабильное состояние не зависит от представления. Мы, однако, привязали вопрос о существовании минимума к определенной асимптотической задаче, где представление, в котором мы ищем минимум, а именно k-представление, выбирается достаточно естественно. Точно так же мы поступаем в задаче многих тел, в ситуации, когда число частиц не очень велико. Сначала мы находим представление, в котором эти метастабильные состояния являются естественными в асимптотической задаче. Поэтому для задачи многих тел мы выберем то представление, в котором при $N \to \infty$ уже имеются серии с метастабильными нижними уровнями.

9. Заключение

После всего вышеизложенного становится понятно, почему мне бы не хотелось, чтобы физики восприняли эту теорию как математическую, а математики как физическую. Особенно, если от физиков можно будет услышать слова, подобные окончанию рассказа Чехова «Новая дача». Цитатой из этого рассказа я начинал свою лекцию, цита-той оттуда же и закончу: «Жили мы без моста, – сказал Володька, ни на кого не глядя, – и не просили и не надо нам. Надо будет – так и на лодке переплывем». И не хотелось бы, чтобы ненависть, подобная той, что испытали жители к этому инженеру, не перешла со стороны физиков на математика, который пытается несколько на другом языке построить новую физическую теорию.

---

[1] Физики неправильно представляют себе, что переход из квантовой статистики при $h > 0$ есть классическая статистика Больцмана.

[2] Пример взят из книги Ильфа и Петрова «Двенадцать стульев».